

Secundário

Resolução do Problema do Mês

UMA SÉRIE PARA 2001

Um processo é calcular todos os termos da série... Mas esperemos que não seja preciso ir até ao fim. Se calcularmos alguns, talvez consigamos descobrir alguma regularidade que nos poupe a toda essa trabalhadeira.

Calculemos então os próximos termos da série:

$$\begin{aligned} 5^{\text{o}} \text{ termo: } & 2^2 + 9^2 = 85 \\ 6^{\text{o}} \text{ termo: } & 8^2 + 5^2 = 89 \\ 7^{\text{o}} \text{ termo: } & 8^2 + 9^2 = 145 \\ 8^{\text{o}} \text{ termo: } & 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \\ 9^{\text{o}} \text{ termo: } & 4^2 + 2^2 = 20 \\ 10^{\text{o}} \text{ termo: } & 2^2 + 0^2 = 4 \\ 11^{\text{o}} \text{ termo: } & 4^2 = 16 \\ 12^{\text{o}} \text{ termo: } & 1^2 + 6^2 = 37 \\ 13^{\text{o}} \text{ termo: } & 3^2 + 7^2 = 58 \\ 14^{\text{o}} \text{ termo: } & 5^2 + 8^2 = 89 \end{aligned}$$

Alto, apareceu um número que já tinha aparecido antes: o 14^o termo é igual ao 6^o. Quer isto dizer que, a partir de agora, a série se vai repetir de oito em oito termos. Ou seja, entra num ciclo de período 8. Os termos 6^o, 14^o, 22^o, 30^o, 38^o,...vão ser iguais.

Então, escusamos de continuar com os cálculos. Basta ver em que posição do ciclo vai calhar o 2001 termo.

Para isso, dividimos 2001 pelo período 8. Dá 250 e o resto é 1. O 2001^o termo seria igual ao 1^o, mas o 1^o ainda não faz parte do ciclo. Avançamos por isso oito termos e chegamos ao 9^o, que é 20.

Conclusão: o 2001^o termo da série é 20.